الأستاذ : علي الشريف
نيابة الخميسات
cherifalix@yahoo.fr

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات
الدورة العادية 2006

الشعب : العلوم التجريبية – العلوم التجريبية – العلوم الزراعية
http://www.9alami.info

التمرين الأول :

1) نعتبر المعادلة التفاضلية : $y''-6y'+9y=0$

لدينا المعادلة المميزة هي : $r^2-6r+9=0$ لدينا : $\Delta'=9-9=0$ إذن : $r=3$

إذ ن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية هي : $y(x)=(\alpha+\beta x)e^{3x}$ حيث $(\alpha,\beta)\in IR^2$

2) نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E): y''-6y'+9y=2e^{3x}$

أ - نعتبر الدالة u المعرفة على IR بما يلي : $u(x)=x^2e^{3x}$

الدالة u قابلة للإشتقاق مرتين على IR بحيث : $u'(x)=(2x+3x^2)e^{3x}$

و $u''(x)=(9x^2+12x+2)e^{3x}$ نجد : $u''(x)-u'(x)+9u(x)=2e^{3x}$

و بالتالي u تحقق المعادلة (E).

ب - حسب 1) و 2) ا – نستنتج أ ن ا لحل العام للمعادلة .

هو : $y(x)=(\alpha+\beta x)e^{3x}+x^2e^{3x}$ $(\alpha,\beta)\in IR^2$

التمرين الثاني :

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}(1+i)z+8i=0$

1) مميز المعادلة هو : $\Delta'=3(1+i)^2-8i=-2i=(1-i)^2$ إذن المعادلة تقبل حلين

عقديين هما :

$$z_1=\sqrt{3}(1+i)+(1-i)=\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i$$
$$z_2=\sqrt{3}(1+i)-(1-i)=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$$

2) أ - لدينا : $z_1^2=\left(\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i\right)^2=4(\sqrt{3}+i)$

و لدينا كذلك : $z_2=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i=i(\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)i)=i\overline{z_1}$

ب - الشكل المثلثي للعدد $4(\sqrt{3}+i)$:

$$4(\sqrt{3}+i)=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left[8,\frac{\pi}{6}\right]$$

ج - الشكل المثلثي للعددين z_1 و z_2 .

لدينا : $z_1^2=4(\sqrt{3}+i)=\left[8,\frac{\pi}{6}\right]$ إذن : $z_1=\left[\sqrt{8},\frac{\pi}{12}\right]$

و لدينا: $z_2=i\overline{z_1}=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[\sqrt{8},-\frac{\pi}{12}\right]=\left[\sqrt{8},\frac{5\pi}{12}\right]$

3) لدينا : $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\arg(z_2)-\arg(z_1)[2\pi]=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}[2\pi]=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و لدينا كذلك : $OA=|z_1|=\sqrt{8}$ و $OB=|z_2|=\sqrt{8}$ يعني : $OA=OB$

نستنتج أن المثلث OAB متساوي أضلاع .

الشعب : العلوم التجريبية – العلوم التجريبية – العلوم الزراعية http://www.9alami.info	تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات الدورة العادية 2006	الأستاذ : علي الشريف نيابة الخميسات cherifalix@yahoo.fr

التمرين الثالث :

1) أ – المستقيم (OA) مار من O و موجه بالمتجهة $\overrightarrow{OA}(1,-1,3)$ و منه فإن التمثيل

البارامتري للمستقيم هو : $\begin{cases} x=0+1\times t \\ y=0+(-1)\times t \\ z=0+3t \end{cases}$ يعني $(OA):\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases}$

ب - المعادلة الديكارتية للمستوى (Q) العمودي على المستقيم (OA) في النقطة A .

لدينا $\overrightarrow{OA}(1,-1,3)$ متجهة منظمية على المستوى (Q) إذن معادلة المستوى

تكتب على شكل : $x-y+3z+d=0$

بتعويض النقطة A نستنتج أن : $1\times1-1\times(-1)+3\times3+d=0$

و منه : $d=-11$ و بالتالي : $x-y+3z-11=0$ هي معادلة د ل (Q) .

ج - لدينا : $\begin{cases} (P): x-y+3z=0 \\ (Q): x-y+3z-11=0 \end{cases}$

من خلال المعادليتين الديكارتيتين للمستويين (P) و (Q) نستنتج أن لهما نفس المتجهة

المنظمية $\overrightarrow{OA}(1,-1,3)$ إذن فهما متوازيين .

2) أ - بما أن (S) مماسة للمستوى (Q) في النقطة A فإن : $(Q)\perp(\Omega A)$

بما أن المستوى (P) يقطع (S) وفق دائرة (Γ) مركزها O فإن : $(P)\perp(O\Omega)$

و بما أن : $(P)//(Q)$.

فإن : $(\Omega A)//(O\Omega)$ و هذا يعني أن النقط O و A و Ω مستقيمية .

إذن: Ω تحقق التمثيل البارمتري ل (OA) و منه : $\begin{cases} a=t \\ b=-t \\ c=3t \end{cases}$ و منه $b=-a$ و $c=3a$.

ب - لدينا : $\Omega A=R$ (R شعاع الفلكة (S))

و لدينا : $O\Omega$ هي مسافة Ω عن المستوى (P) .

إذن حسب خاصية فيتاغورس : $O\Omega^2+r^2=R^2$ يعني : $R^2-O\Omega^2=33$

من جهة أخرى لدينا :

$$\Omega A^2-O\Omega^2=\left(\sqrt{(1-a)^2+(-1-b)^2+(3-c)^2}\right)^2-\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2$$

يعني :

$$\begin{aligned}\Omega A^2-O\Omega^2&=(1-a).1-1.(-1-b)+3.(3-c)\\&=a-b+3c=-11\end{aligned}$$

ج - من خلال : $\begin{cases} c=3a\ ,\ b=-a \\ a-b+3c=-11 \end{cases}$ نستنتج أن : $a=-1\ ,\ b=1\ ,\ c=-3$

و منه : $\Omega(-1,1,-3)$.

نستنتج مما سبق أن : $R=O\Omega=\sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2+(3+3)^2}=2\sqrt{11}$

الأستاذ : علي الشريف
نيابة الخميسات
cherifalix@yahoo.fr

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات
الدورة العادية 2006

الشعب : العلوم التجريبية – العلوم التجريبية – العلوم الزراعية
http://www.9alami.info

المسألة :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بمايلي: $g(x)=\ln(1+x)-x$

1.) أ - الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$.

ولدينا : $$\left(\forall x\in[0,+\infty[\right):g'(x)=\frac{-x}{x+1}$$

يعني أن الدالة g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$.

ب) بما أن g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$ و $g(0)=0$

فإن: $\left(\forall x\in[0,+\infty[\right):g(x)\leq 0$

2) لدينا حسب 1) $\left(\forall x\in[0,+\infty[\right):g(x)\leq 0$ و $g(0)=0$ و g تناقصية قطعا

نستنتج إذ ن أ ن : $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right):g(x)\prec 0$

يعني : $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right):0\prec\ln(x+1)\prec x$

II) نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

و (C) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $1cm$)

1) مجموعة تعريف الدالة f : $$D_f=\left\{x\in IR/\frac{x+1}{x-1}\succ 0\right\}$$

من خلال جدول إشارة $\frac{x+1}{x-1}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

نستنتج أن : $D_f=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

2) فردية الدالة f :

❶ $x\in D_f\Leftrightarrow -x\in D_f$

❷ $$f(-x)=-x+\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=-x-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-f(x)$$

من ❶ و ❷ نستنتج أن الدالة f فردية .

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ و $\ln(1)=0$

* $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$

3) أ - الدالة f قابلة للإشتقاق على D_f و لدينا :

$$f'(x)=1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'\times\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}=\frac{x^2-3}{x^2-1}$$

ب) تغيرات الدالة f على المجال $]1,+\infty[$:

من خلا ل جدول الإشارة :

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-3	‖	$-$	0	$+$	
x^2-1	‖	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$	‖	$-$		$+$	

نستنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $\left[\sqrt{3},+\infty\right[$ و تناقصية قطعا على $\left]1,\sqrt{3}\right]$.

4) أ – لدينا : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=0$ و هذا يعني أن (C) يقبل المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل بجوار $\pm\infty$.

ب) إشارة $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$:

لدينا :
$$\forall x\in D:\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln(1+\frac{2}{x-1})$$

و لدينا : $\forall x\in\left]1,+\infty\right[:\dfrac{2}{x-1}\succ 0$ و $\forall x\in\left]-\infty,-1\right[:-1\prec\dfrac{2}{x-1}\prec 0$

و هذا يعني أن :
$$\forall x\in\left]1,+\infty\right[:\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\succ 0 \quad و \quad \forall x\in\left]-\infty,-1\right[:\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\prec 0$$

ج) بما أن : $\forall x\in D_f:f(x)-x=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

من خلال السؤال السابق نستنتج أ ن :

* (C) فوق المستقيم (Δ) على المجال $\left]1,+\infty\right[$.

* (C) تحت المستقيم (Δ) على المجال $\left]-\infty,-1\right[$.

5) بما أن الدالة f فردية فإن منحناها (C) متماثل بالنسبة لأصل المعلم يكفي إذن أن نرسم المنحى من أجل $x\in\left]1,+\infty\right[$ و نستج الجزء الآخر بواسطة التماثل بالنسبة لاصل المعلم . الشكل أسفله

6) أ - حساب التكامل : $\displaystyle\int_2^4\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$.

لدينا :
$$\begin{cases}u(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\\ v'(x)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(x)=\dfrac{-2}{x^2-1}\\ v(x)=x\end{cases}$$

إذن :
$$\int_2^4\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^4-\int_2^4\frac{-2x}{x^2-1}dx$$
$$=\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^4+\int_2^4\frac{2x}{x^2-1}dx$$
$$=\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^4+\left[\ln\left|x^2-1\right|\right]_2^4$$
$$=4\ln\left(\frac{5}{3}\right)-2\ln(3)+\ln(15)-\ln(3)$$
$$=4\ln(5)-4\ln(3)-2\ln(3)+\ln(5)+\ln(3)-\ln(3)$$
$$=5\ln(5)-6\ln(3)$$

الأستاذ : علي الشريف
نيابة الخميسات
cherifalix@yahoo.fr

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات
الدورة العادية 2006

الشعب : العلوم التجريبية – العلوم التجريبية – العلوم الزراعية
/http://www.9alami.info

ب) لدينا : $S=\int_2^4 |f(x)-x|dx.cm^2=\int_2^4 \left|\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right|dx.cm^2$

بما أن : $\forall x[2,4]:\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\succ 0$

فإن : $S=\left(5\ln(5)-6\ln(3)\right)cm^2$

III)

1) أ - لدينا :

$$\forall n\in IN^*-\{1\}: u_n=f(n)-n=\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$$

ب) لدينا :

$$\forall n\ge 2: \frac{2}{n-1}\succ\frac{2}{n}\Rightarrow 1+\frac{2}{n-1}\succ 1+\frac{2}{n}$$
$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\succ\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$
$$\Rightarrow u_n\succ u_{n+1}$$

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية .

2) أ – حسب I (2 (لينا : $(\forall x\in]0,+\infty[):0\prec\ln(x+1)\prec x$

بما أن : $\forall n\ge 2:\frac{2}{n-1}\succ 0$ فإن : $0\prec u_n\prec\frac{2}{n-1}$

ب) بما أن : $\forall n\in IN^*-\{1\}:0\prec u_n\prec\frac{2}{n-1}$

و من جهة أخرى : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{n-1}=0$ و بالتالي : $\lim_{x\to+\infty}u_n=0$.

المنحنى (C) :